Παρασκευή 08/05/20

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ

Η εκτίμηση σε διάστημα αναπτύσσει μεθοδολογίες για τη κατασκευή διαστήματος το οποίο

α) περιλαμβάνει την άγνωστο παράμετρο

β) η πιθανότητα η άγνωστη παράμετρος να περιλαμβάνεται στο διάστημα αυτό είναι προκαθορισμένη και όσο υψηλή επιθυμούμε.

Διάστημα εμπιστοσύνης:

Διάστημα με άκρα συναρτήσεις του τυχαίου δείγματος $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$

Ορισμός:

Έστω ένα τυχαίο δείγμα $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x,\theta)$ με $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}$. Αν $L(X)$ και $U(X)$ είναι στατιστικές συναρτήσεις με $L<U$ τότε το τυχαίο διάστημα $(L(X),U(X))$ λέγεται διάστημα εμπιστοσύνης για την $g(\theta)$ με βαθμό εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$, $0<\alpha<1$, εάν

$P(L(X) < g(\theta) \le U(X)) = 1-\alpha \quad \forall\theta\in\Theta$

Παρατήρηση:

α) Η φυσική ερμηνεία του βαθμού εμπιστοσύνης ενός διαστήματος εμπιστοσύνης είναι η ακόλουθη:

Αν λάβουμε 100 παρατηρηθείσες τιμές $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ του τ.δ. $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ τότε αναμένουμε $100(1-\alpha)\%$ φορές η αληθής τιμή της $g(\theta)$ να περιλαμβάνεται στα όρια του αντίστοιχου διαστήματος $(L(x),U(x))$

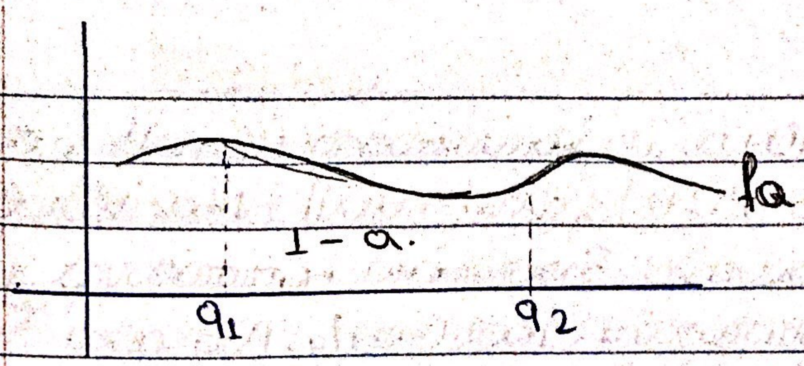
β) Επειδή είναι πιθανόν να κατασκευάσουμε πολλές στατ. συναρτ. $L(X)$, $U(X)$ τ.ω $P(L(X) \leq g(\theta) \leq U(X)) = 1-a$ $\forall \theta \in \Theta$
άρα και περισσότερα διαστήματα εμπιστοσύνης για την $g(\theta)$ με βαθμό εμπιστοσύνης $100(1-a)\%$. Από αυτά το προτιμότερο είναι το διάστημα που έχει το μικρότερο μήκος καθώς περικλείει εγγύτερα την άγνωστη $g(\theta)$.
Άρα μεταξύ διαστημάτων εμπιστοσύνης με ίδιο βαθμό εμπιστοσύνης καλύτερο θεωρείται εκείνο με το ελάχιστο μήκος ή το ελάχιστο αναμενόμενο μήκος αφού τα άκρα του είναι στ. συναρτήσεις, δλδ τυχαίες μεταβλητές.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΕΠΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΑΣ

Έστω τ.δ $X=(X_1, X_2, \ldots X_n)$ από πληθυσμό με κατανομή $f(x;\theta)$ με $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Για την κατασκευή ενός διαστήματος εμπιστοσύνης για την $g(\theta)$ με βαθμό εμπιστοσύνης $100(1-a)\%$, $0<a<1$ ακολουθούμε τα εξής βήματα

1) Αναζητούμε μια συνάρτηση του τυχαίου δείγματος $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ και της άγνωστης παραμέτρου θ, έστω $Q(X,\theta)$ τ.ω η κατανομή της $Q(X,\theta)$ να μην εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο θ. Μια τέτοια συνάρτηση $Q(X,\theta)$ ονομάζεται αντιστρεπτή ποσότητα.

2) Αν f_Q η κατανομή της αντιστρεπτής ποσότητας Q τότε η f_Q δεν εξαρτάται από την παράμετρο θ και υπάρχουν, έστω, σταθερές q_1 κ q_2, $q_1<q_2$ που είναι ανεξάρτητες της θ (εξαρτώνται από την κατανομή f_Q της $Q(X,\theta)$ και το a, $0<a<1$) τ.ω.
$P(q_1 \leq Q(X,\theta) \leq q_2) = 1-a$ $\forall \theta \in \Theta$ και $0<a<1$ (*)



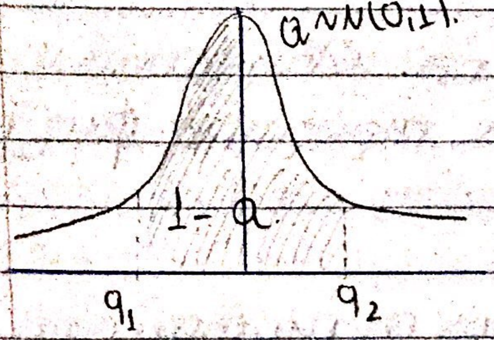
3) Λύνουμε ως προς θ ή $g(\theta)$ την διπλή ανισότητα (*) προσπαθώντας να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής: $P(L(X) \leq g(\theta) \leq U(X)) = 1-\alpha$, $\forall \theta \in \Theta$, $0<\alpha<1$ για κάποιες στατιστικές συναρτήσεις $L(X)$ και $U(X)$.
Τότε το διάστημα $(L(X), U(X))$ είναι διάστημα εμπ. για την θ ή την $g(\theta)$ με βαθμό εμπιστοσύνης $100(1-\alpha)\%$, $0<\alpha<1$

Διαστήματα εμπιστοσύνης για τις παραμέτρους κανονικής κατανομής.
Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Θα κατασκευαστούν στη συνέχεια τα διαστήματα εμπιστοσύνης (δ.ε) για τις παραμέτρους μ και σ^2 της κατανομής αυτής με βαθμό εμπιστοσύνης (β.ε) $100(1-\alpha)\%$

I) Δ.Ε για την μ, όταν $\boxed{\sigma^2 \text{ γνωστό}}$

Θεωρούμε την ποσότητα $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Η Q είναι συνάρτηση του τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ (μέσω του $\bar{X}$) και της άγνωστης παραμέτρου μ. Επιπλέον: $Q = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

άρα η κατανομή της Q είναι ανεξάρτητη της άγνωστης παραμέτρου μ.



Βασιζόμενοι στο σχήμα:
Υπάρχουν q_1, q_2 $(-\infty < q_1 < q_2 < +\infty)$
τ.ω $P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$

Επομένως:

$$1-a = P(q_1 < Q < q_2) = P\left(q_1 < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < q_2\right)$$

Λύνοντας την διπλή ανισότητα ως προς την άγνωστη παράμετρο μ, προκύπτει:

$$1-a = P\left(\bar{X} - q_2 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - q_1 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Σύμφωνα με τον ορ. του δ.ε ένα δ.ε για την μ με β.ε $100(1-a)\%$ είναι το $\left(\bar{X} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} - q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Το ερώτημα που γεννιέται είναι πως θα επιλεγούν τα q_1, q_2?
Αν ληφθεί υπόψη ότι ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό ενός δ.ε είναι το μήκος του, τότε τα q_1, q_2 θα επιλεγούν ώστε το μήκος του δ.ε να γίνεται ελάχιστο
Άρα αναζητούνται τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν το $l = \bar{X} - q_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - q_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$

Όμως τα q_1, q_2 δεσμεύονται από την σχέση:
$P(q_1 < Q < q_2) = 1-a \Rightarrow \int_{q_1}^{q_2} f_{N(0,1)}(q)\,dq = 1-a$

$\Rightarrow \Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$, όπου Φ η α.σ.κ της $N(0,1)$.

Επομένως ζητώ τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν την $l = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$ υπό τον περιορισμό $\Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$

Παραγωγίζοντας την l ως προς q_1 και εξισώνοντας με το 0 προκύπτει:

$$\frac{dl}{dq_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right) = 0$$

Λαμβάνοντας υπόψην ότι τα q_2, q_1 ~~[illegible]~~ αλληλοεξαρτώνται μέσω του περιορισμού $\Phi(q_2) - \Phi(q_1) = 1-a$ αυτός αξιοποιείται για τον προσδιορισμό του $\frac{dq_2}{dq_1}$

Παραγωγίζοντας τον περιορισμό ως προς q_1 προκύπτει

$$\frac{d}{dq_1}\left(\Phi(q_2) - \Phi(q_1)\right) = \frac{d}{dq_1}(1-a) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq_1}\Phi(q_2) - \frac{d}{dq_1}\Phi(q_1) = 0 \text{ ή } \frac{dq_2}{dq_1}\frac{d\Phi(q_2)}{dq_2} - f_Z(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} f_Z(q_2) - f_Z(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_Z(q_1)}{f_Z(q_2)}} \quad (1)$$ όπου f_Z η σ.π.π της $N(0,1)$.

Λαμβάνοντας υπόψην την (1) η $\frac{dl}{dq_1} = 0$ δίνει

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1} - 1\right) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = 1 \Rightarrow \frac{f_Z(q_1)}{f_Z(q_2)} = 1$$

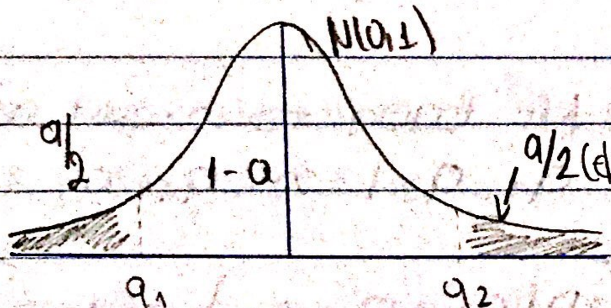
$\Rightarrow f_Z(q_1) = f_Z(q_2)$

Επομένως τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν το μήκος του δ.ε μπορούν να προσδιοριστούν από την ισότητα $f_Z(q_1) = f_Z(q_2)$

Λόγω της συμμετρίας της f_Z γύρω από το μηδέν και $q_1 < q_2$ θα πρέπει $q_2 = -q_1$

$$f_Z(q_1) = f_Z(q_2) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q_1^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q_2^2}{2}} \text{ ή } q_1^2 = q_2^2$$

και επειδή $-\infty < q_1 < q_2 < +\infty$, $q_2 = -q_1$



Από το σχήμα και τον ορ. των εκατοστιαίων σημείων της $N(0,1)$. $P(Z \geq Z_a) = a$ προκύπτει

$P(Z \geq q_2) = \frac{a}{2}$ άρα $q_2 = Z_{\frac{a}{2}}$

Επιπλέον $q_1 = -q_2 = -Z_{\frac{a}{2}}$

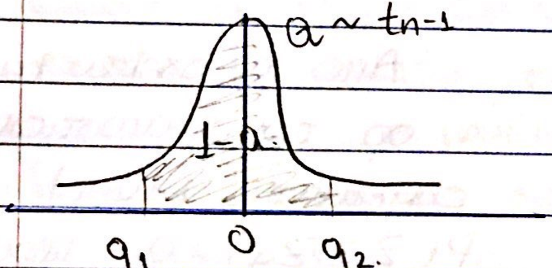
Έτσι το διάστημα εμπ. για την μ με β.ε $100(1-a)\%$ είναι

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \text{ ή } \bar{X} \pm Z_{\frac{a}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

και είναι ελάχιστου μήκους.

II) Δ.Ε για την μ, όταν $\boxed{\sigma^2 \text{ άγνωστη}}$

Έστω τ.δ $X_1, \dots, X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με σ^2 άγνωστη. Θεωρούμε την $Q = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ με S^2 τη δειγματική διακύμανση. Είναι γνωστό ότι $Q \sim t_{n-1}$. Επειδή η ποσότητα Q είναι συνάρτηση του τ.δ (μέσω του $\bar{X}$) της άγνωστης παραμέτρου μ και η κατανομή της Q δεν εξαρτάται από την άγνωστη παράμετρο μ, η Q είναι αντιστρεπτή ποσότητα.



Με βάση το σχήμα υπάρχουν q_1, q_2 $(-\infty < q_1 < q_2 < +\infty)$ τ.ω

$$P(q_1 < Q < q_2) = 1-a$$

Επομένως $1-a = P(q_1 < Q < q_2) = P\left(q_1 < \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < q_2\right)$

$$= P\left(\bar{X} - q_2 \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - q_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

Άρα ένα $100(1-a)\%$ δ.ε για την μ όταν σ^2 είναι άγνωστο είναι: $\left(\bar{X} - q_2 \dfrac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} - q_1 \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$

Για την κατασκευή δ.ε ελάχιστου μήκους απαιτούνται q_1, q_2 $(-\infty, q_1 < q_2 < +\infty)$ που ελαχιστοποιούν το μήκος $l = \dfrac{S}{\sqrt{n}}(q_2 - q_1)$ υπό τον περιορισμό $1-a = P(q_1 < Q < q_2) =$

$$= \int_{q_1}^{q_2} f_{t_{n-1}}(q)\,dq \Rightarrow 1-a = F_{t_{n-1}}(q_2) - F_{t_{n-1}}(q_1)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία γνωστής σ^2:

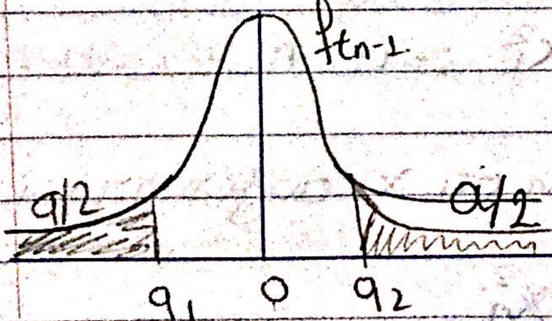
$$\frac{dl}{dq_1}=0 \Rightarrow \frac{S}{\sqrt{n}}\left(\frac{dq_2}{dq_1}-1\right)=0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}=1$$

και $\frac{d}{dq_1}\left(F_{t_{n-1}}(q_2)-F_{t_{n-1}}(q_1)\right)=\frac{d}{dq_1}(1-a)=0$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}\frac{dF_{t_{n-1}}(q_2)}{dq_2}-\frac{dF_{t_{n-1}}(q_1)}{dq_1}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} f_{t_{n-1}}(q_2)=f_{t_{n-1}}(q_1) \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}=\frac{f_{t_{n-1}}(q_1)}{f_{t_{n-1}}(q_2)}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{dq_2}{dq_1}=1 \Rightarrow f_{t_{n-1}}(q_1)=f_{t_{n-1}}(q_2)$



Η συμμετρία της t_{n-1} κατανομής γύρω από το 0 οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $q_2=-q_1$

Επιπλέον $P(t_{n-1}\ge q_2)=\frac{a}{2}$ και από τον ορ. των εκατοστιαίων σημείων της t_{n-1} κατανομής $(P(t_{n-1}\ge t_{n-1,a})=a)$ προκύπτει ότι $q_2=t_{n-1,\frac{a}{2}}$ οπότε $q_1=-t_{n-1,\frac{a}{2}}$.

Έτσι το Δ.Ε ελαχίστου μήκους για την μ με β.ε $100(1-a)\%$ όταν σ^2 άγνωστη είναι $\left[\bar{X}-t_{n-1,\frac{a}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t_{n-1,\frac{a}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

ή $\bar{X} \pm t_{n-1,\frac{a}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$

Παρατήρηση:
Μεθοδολογικά η κατασκευή δ.ε για μια παράμετρο θα πρέπει να έχει ως αφετηρία το επαρκές στατιστικό και με βάση αυτό θα πρέπει να επιχειρείται η δημιουργία της αντιστρεπτής ποσότητας.
Το δ.ε λαμβάνει υπόψη του τη μεταβλητότητα, τη διακύμανση του εκτιμητή $\bar{X}$ που είναι $\frac{\sigma^2}{n}$ όταν σ^2 γνωστή

και εκτιμάται από την S^2/n όταν σ^2 άγνωστη

III] Δ.Ε για την σ^2 όταν μ γνωστή.

Έστω τ.δ $X_1,\dots X_n$ από κατανομή $N(\mu,\sigma^2)$, μ γνωστό
Για την κατασκευή της αντιστρεπτής ποσότητας:
$X_i \sim N(\mu,\sigma^2)$, $i=1,\dots,n \Rightarrow \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, $i=1\dots n$

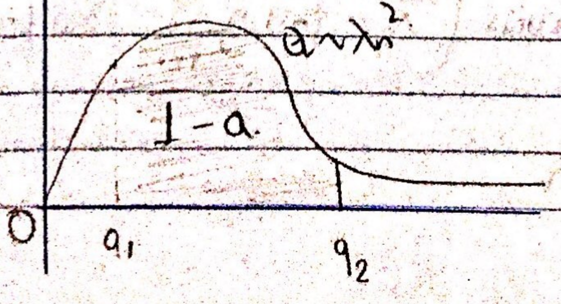
$$\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim N^2(0,1) \equiv \chi_1^2 \quad i=1,\dots,n$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι X_i ανεξάρτητες, $i=1\dots n$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_{\sum_{i=1}^{n} 1} \equiv \chi_n^2$$

Θεωρούμε τώρα την $Q=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$

Η Q είναι συνάρτηση του τ.δ της παραμέτρου σ^2 και η κατανομή της χ_n^2 δεν εξαρτάται από την άγνωστη σ^2.
Άρα Q αντιστρεπτή ποσότητα



Υπάρχουν q_1, q_2 $(0<q_1<q_2<+\infty)$ τ.ω $P(q_1<Q<q_2)=1-a$

Έτσι $1-a = P(q_1<Q<q_2) = P\left(q_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} < q_2\right)$

Λύνοντας τις ανισότητες ως προς σ^2 έχουμε

$$1-a = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{q_1}\right)$$

Επομένως, ένα $100(1-a)\%$ δ.ε για την σ^2 είναι

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{q_2}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{q_1}\right)$$

Θέλω να προσδιορίσω τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν το μήκος $l = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ υπό του περιορισμού

$1-a = P(q_1<Q<q_2) \Rightarrow 1-a = \int_{q_1}^{q_2} f_{X_n^2}(q)\,dq$

$\Rightarrow 1-a = F_{X_n^2}(q_2) - F_{X_n^2}(q_1)$

Επειδή το $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ είναι ανεξάρτητο των q_1, q_2 αρκεί να προσδιορίσω τα q_1, q_2 που ελαχιστοποιούν το

$l^* = 1/q_1 - 1/q_2$ (1) υπό του περιορισμού $F_{X_n^2}(q_2) - F_{X_n^2}(q_1) = 1-a$ (2)

Από την (1) $\frac{dl^*}{dq_1} = -\frac{1}{q_1^2} - \frac{dq_2}{dq_1}\left(\frac{d}{dq_2}\left(\frac{1}{q_2}\right)\right) = \frac{-1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\frac{dq_2}{dq_1}$ (3)

Από την (3)

$\frac{dl^*}{dq_1} = 0 \Rightarrow \frac{-1}{q_1^2} + \frac{1}{q_2^2}\frac{dq_2}{dq_1} = 0 \Rightarrow \frac{1}{q_2^2}\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{1}{q_1^2}$ (4)

Απο την (2) παραγωγίζοντας ως προς q_1:

$$\frac{d}{dq_1} f_{x^2}(q_2) - \frac{d}{dq_1} f_{x_n^2}(q_1) = 0 \Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1}\frac{d f_{x_n^2}(q_2)}{dq_2} - f_{x_n^2}(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} f^2_{x_n}(q_2) - f_{x_n^2}(q_1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{f_{x_n^2}(q_1)}{f_{x_n^2}(q_2)} \quad (5)$$

Απο τις (4) και (5) προκύπτει:

$$\frac{1}{q_2^2}\frac{f_{x_n^2}(q_1)}{f_{x_n^2}(q_2)} = \frac{1}{q_1^2} \Rightarrow \boxed{q_1^2 f_{x_n^2}(q_1) = q_2^2 f_{x_n^2}(q_2)} \quad (6)$$

αλλά $f_{x_n^2}(q) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} q^{\frac{n}{2}-1} e^{-q/2}$ και αντικαθιστώντας στην (6) μετά από λίγες πράξεις προκύπτει

$$\boxed{q_1^{\frac{n}{2}+1} e^{-q_1/2} = q_2^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{q_2}{2}}} \quad (7)$$

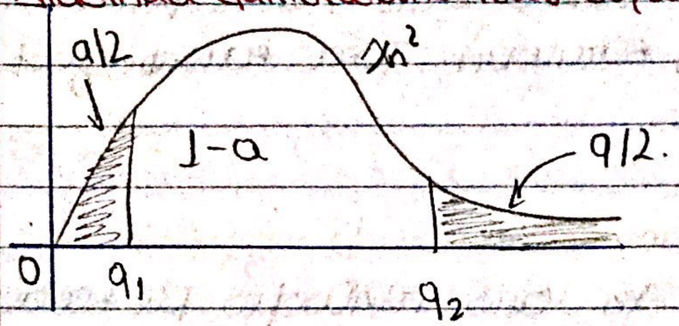
Η (7) μαζί με την $\int_{q_1}^{q_2} f_{x_n^2}(q)\,dq = 1-a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{q_1}^{q_2} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{n/2}} q^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{q}{2}}\, dq = 1-a$$

Το σύστημα αυτό δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά και να βρεθούν τα q_1, q_2 σε κλειστή μορφή. Λύνεται μόνο αριθμητικά

Σε περίπτωση που τα q_1, q_2 δεν μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή καταφεύγουμε σε δ.ε ίσων ουρών:

Διάστημα εμπιστοσύνης ίσων ουρών για την σ^2



Με βάση το σχήμα, δ.ε ίσων ουρών είναι εκείνο το οποίο προκύπτει για q_1, q_2 τ.ω να δημιουργούν ίσες ουρές στην κατανομή της αντιστρεπτής ποσότητας. Δηλαδή τα q_1, q_2 ($q_1 < q_2$) επιλέγονται έτσι ώστε:

$$P(X_n^2 \geq q_2) = \frac{a}{2} = P(X_n^2 \leq q_1)$$

Λαμβάνοντας υπόψην τον ορ. των εκατοστιαίων σημείων της X_n^2 κατανομής ($P(X_n^2 \geq X_{n,a}^2) = a$), προκύπτει ότι $q_2 = X^2_{n,\frac{a}{2}}$

και $P(X_n^2 \leq q_1) = \frac{a}{2} \Rightarrow 1 - P(X_n^2 \geq q_1) = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow P(X_n^2 \geq q_1) = 1 - \frac{a}{2} \Rightarrow q_1 = X^2_{n,1-\frac{a}{2}}$

Το δ.ε ίσων ουρών με β.ε $100(1-a)\%$ για την σ^2 όταν μ είναι γνωστή είναι

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{X^2_{n,\frac{a}{2}}}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{X^2_{n,1-\frac{a}{2}}}\right]$$

Παρατήρηση:

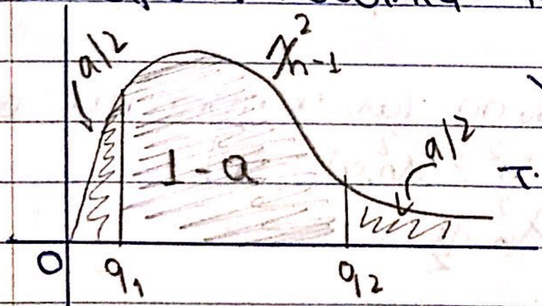
Το δ.ε που παρουσιάστηκε φαίνεται ότι δεν είναι πάντοτε εφικτό να προκύψει διάστημα ελαχίστου μήκους αναλυτικά. Αυτό συμβαίνει συνήθως όταν η αντιστρεπτή ποσότητα έχει ασύμμετρη κατανομή. Τότε καταφεύγουμε σε δ.ε ίσων ουρών.

IV) Δ.Ε για την σ^2 όταν μ άγνωστη

Έστω τ.δ $X_1, \ldots X_n$ από πληθυσμό με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με μ άγνωστη παράμετρο.

Με δεδομένο ότι S^2 είναι το ελάχιστον αμερόληπτο εκτιμητής της σ^2, θεωρούμε την $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$

η οποία είναι συνάρτηση του δείγματος, της παραμέτρου σ^2 και η κατανομή της ανεξάρτητη της σ^2 άρα Q αντιστρεπτή ποσότητα. Με βάση το σχήμα



Υπάρχουν q_1, q_2 $(0 < q_1 < q_2 < +\infty)$ τ.ω $P(q_1 < Q < q_2) = 1-\alpha$

Έτσι $1-\alpha = P(q_1 < Q < q_2) = P\left(q_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < q_2\right)$

$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right)$ επομένως ένα $100(1-\alpha)\%$

δ.ε για την σ^2 είναι $\left(\frac{(n-1)S^2}{q_2}, \frac{(n-1)S^2}{q_1}\right)$

Αν ακολουθηθεί ακριβώς η διαδικασία του προηγούμενου δ.ε θα διαπιστωθεί ότι η ελαχιστοποίηση του μήκους του παραπάνω δ.ε δεν οδηγεί σε αναλυτική λύση για τα q_1, q_2. άρα πάμε στο δ.ε ίσων ουρών

Τότε τα q_1, q_2 προσδιορίζονται έτσι ώστε $P(Q \ge q_2) = \frac{a}{2} = P(Q \le q_1$

Με βάση το σχήμα και τον ορ. των εκατοστιαίων σημείων της χ^2_{n-1} $\left(P(\chi^2_{n-1} \ge \chi^2_{n-1,a}) = a\right)$.

Έχουμε $P(\chi^2_{n-1} \ge q_2) = \frac{a}{2} \Rightarrow q_2 = \chi^2_{n-1,\frac{a}{2}}$

$P(\chi^2_{n-1} \ge q_1) = 1 - \frac{a}{2}$ και έτσι $q_1 = \chi^2_{n-1,1-\frac{a}{2}}$.

Έτσι: το δ.ε ίσων ουρών για την σ^2 με β.ε $100(1-a)\%$ όταν η μ είναι γνωστή είναι:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{a}{2}}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{a}{2}}} \right).$$